О дискретном аналоге уравнения Цицейки

В.Э. Адлер

ИТФ им. Л.Д. Ландау, 29 апреля 2011

Найден интегрируемый дискретный аналог уравнения Цицейки в виде уравнения в частных разностях на квадратной решётке. Его высшей непрерывной симметрией является неоднородная цепочка типа Вольтерра–Нариты–Богоявленского. Она определяет дискретизацию уравнения Савады–Котеры (уравнение типа КдФ 5-го порядка). Интегрируемость этих дискретизаций следует из конструкции представления Лакса. Геометрически, лаксово представление интерпретируется как уравнения Гаусса для аффинных сфер. Выведены билинейные уравнения для τ-функции.

Уравнение Цицейки

$$H_{xy} = e^{H} - e^{-2H}$$

- Приложения в дифференциальной геометрии
- Спектральная задача 3-го порядка
- Преобразование Бэклунда 2-го порядка
- Высшая симметрия 5-го порядка связана с уравнением Савады–Котеры

$$U_\tau = U_{xxxxx} + 5UU_{xxx} + 5U_xU_{xx} + 5U^2U_x$$

[1] G. Tzitzeica. Sur une nouvelle classe de surfaces. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* ***25:1*** (1907) 180–187.

[2] K. Sawada, T. Kotera. *Progr. Theor. Phys.* ***51:5*** (1974) 1355–1367.

[3] R.K. Dodd, R.K. Bullough. *Proc. Roy. Soc. London A* ***352*** (1977) 481–503.

[4] A.V. Zhiber, A.B. Shabat. *Soviet Phys. Doklady* ***24*** (1979) 607.

[5] A.V. Mikhailov. *Soviet Phys. JETP Lett.* ***30*** (1979) 414–418.

SUR UNE NOUVELLE CLASSE DE SURFACES.

Par M. **Georges Tzitzéica** (Bucarest).

Adunanza del 10 novembre 1907.

9. Supposons maintenant $U \neq 0$, $V \neq 0$. En remplaçant h par $h_1 = h\sqrt[3]{UV}$, et en faisant le changement de variables $\alpha = \int \sqrt[3]{U}\,du$, $\beta = \int \sqrt[3]{V}\,dv$ on obtient le système

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \omega}{\partial \beta}, \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial \beta}\dfrac{\partial \omega}{\partial \beta}, \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = h\omega, \end{cases}$$

où h est une intégrale de l'équation

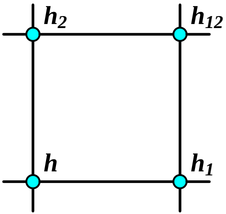
$$(14) \qquad \frac{\partial^2 \log h}{\partial \alpha \partial \beta} = h - \frac{1}{h^2}.$$

Известные дискретизации

➢ Дискретизация Бобенко–Шифа (1999) содержит три переменные:

$$hh_{12}(h_1h_2-h_1-h_2)+h_{12}+h-1-\frac{AB}{h}h_1h_2h_{12}=0,$$
$$\frac{A_2}{A}=\frac{h_1}{h},\quad \frac{B_1}{B}=\frac{h_2}{h}. \tag{BS}$$

➢ Дискретизация при помощи преобразования Бэклунда (Шиф, 1996) также содержит лишние переменные.



В нашей дискретизации будет только четыре переменных на плакете:

$$Q(h,h_1,h_2,h_{12})=0.$$

$h=h(n_1,n_2)$, $h_1=h(n_1+1,n_2)$, ...

Цель доклада

Доказать интегрируемость дискретизаций:

$$H_{xy} = e^{H} - e^{-2H} \tag{Tz}$$

$$\uparrow$$

$$hh_{12}(c^{-1}h_1h_2 - h_1 - h_2) + h_{12} + h - c = 0 \tag{dTz}$$

$$u_t = u^2(u_{11}u_1 - u_{\bar{1}}u_{\overline{11}}) - u(u_1 - u_{\bar{1}}) \tag{dSK}$$

$$\downarrow$$

$$U_\tau = U_{xxxxx} + 5UU_{xxx} + 5U_xU_{xx} + 5U^2U_x \tag{SK}$$

[6] V.E. Adler. On a discrete analog of the Tzitzeica equation. arXiv:1103.5139.

Непрерывный предел

- (dTz) $\to$ (Tz), $\varepsilon \to 0$:

$$c = 1 + \alpha\varepsilon^6, \quad h(n_1, n_2) = 1 + \beta\varepsilon^2 v(x, y), \quad x = \varepsilon n_1, \quad y = \varepsilon n_2.$$

Члены до ε^5 сокращаются тождественно. При ε^6 имеем уравнение

$$\beta^2(vv_{xy} - v_x v_y) = 2\beta^3 v^3 - 2\alpha.$$

Это (Tz) точностью до замены $v = e^H$ и растяжений (если $c \equiv 1$, то $\alpha = 0$ и получается уравнение Лиувилля).

- (dSK) $\to$ (SK), $\varepsilon \to 0$:

$$u(n, t) = \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon^2}{9} U\Big(x - \frac{4}{9}\varepsilon t, \tau + \frac{2\varepsilon^5}{135} t\Big), \quad x = \varepsilon n.$$

Вырождение: уравнение Лиувилля

Уравнение (dTz) содержит неустранимый параметр c:

$$hh_{12}(c^{-1}h_1h_2 - h_1 - h_2) + h_{12} + h - c = 0.$$

Инвариантность относительно отражений

$$h \to -h, \quad c \to -c \qquad \text{и} \qquad h(n_1, n_2) \to 1/h(-n_1, n_2), \quad c \to c^{-1}.$$

В неподвижных точках $c = \pm 1$ возникает вырождение

$$hh_{12}(h_1 - 1)(h_2 - 1) = (h - 1)(h_{12} - 1). \tag{dL}$$

Явное решение

$$h = \frac{(a_1 - b)(a - b_2)}{(a - b)(a_1 - b_2)}, \quad a = a(n_1), \quad b = b(n_2)$$

следует из линеаризующей подстановки

$$h = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau\tau_{12}} \ : \quad \tau_{12} - \tau_1 - \tau_2 + \tau = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{(dL)}.$$

Спектральная задача в непрерывном случае

Уравнения Гаусса для аффинных сфер $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ с индефинитной метрикой Бляшке:

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= H_x \psi_x + \lambda e^{-H} \psi_y, \\ \psi_{xy} &= e^{H} \psi, \\ \psi_{yy} &= \lambda^{-1} e^{-H} \psi_x + H_y \psi_y. \end{aligned} \tag{1}$$

Геометрия:

1) x, y — **асимптотические координаты** (ψ_{xx}, ψ_{yy} лежат в касательной плоскости);

2) условие Цицейки: **аффинные нормали** ψ_{xy} проходят через начало координат.

---

[7] C. Rogers, W.K. Schief. Bäcklund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge UP, 2002.

Условия совместности (уравнения Майнарди–Кодацци) дают уравнение (Tz). Обозначив $\Psi = (\psi, \psi_x, \psi_y)^T$, можно перейти к представлению нулевой кривизны:

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_y = V\Psi \quad \Rightarrow \quad U_y - V_x = [V, U],$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & H_x & \lambda e^{-H} \\ e^H & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e^H & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} e^{-H} & H_y \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдём к дискретизациям (BS) и (dTz). Для них линейная задача

$$\psi_{11} = \dots, \quad \psi_{12} = \dots, \quad \psi_{22} = \dots$$

записывается в матричном виде для $\Psi = (\psi, \psi_1, \psi_2)^T$:

$$\Psi_1 = L\Psi, \quad \Psi_2 = M\Psi \quad \Rightarrow \quad L_2 M = M_1 L.$$

Дискретные индефинитные аффинные сферы

Система (BS) служит условием совместности для дискретного аналога уравнений Гаусса ($\psi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$):

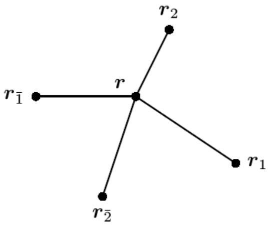
$$\begin{aligned}
\psi_{11} - \psi_1 &= \frac{h_1 - 1}{h_1(h-1)}(\psi_1 - \psi) + \frac{\lambda A}{h-1}(\psi_{12} - \psi_1),\\
\psi_{12} + \psi\ &= h(\psi_1 + \psi_2),\\
\psi_{22} - \psi_2 &= \frac{h_2 - 1}{h_2(h-1)}(\psi_2 - \psi) + \frac{\lambda^{-1} B}{h-1}(\psi_{12} - \psi_2).
\end{aligned}$$

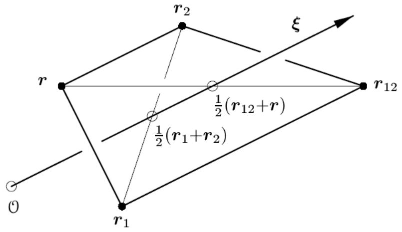
1) дискретная асимптотическая сеть. Любые пять соседних точек компланарны (1-е и 3-е уравнения)

$$\psi, \quad \psi_1, \quad \psi_{\bar{1}}, \quad \psi_2, \quad \psi_{\bar{2}}.$$

2) дискретная аффинная лоренцевски гармоническая сеть. Дискретные аффинные нормали, прикреплённые к центрам плакетов, проходят через начало координат (2-е уравнение)

$$\psi_{12} - \psi_1 - \psi_2 + \psi = k(\psi_{12} + \psi_1 + \psi_2 + \psi).$$





[8] W.K. Schief. In: P. Clarkson, F. Nijhoff (eds), Symmetries and Integrability of Difference Equations. LMS, Lecture Note Series 255, Cambridge UP (1999) 137–148.

[9] A.I. Bobenko, W.K. Schief. In: A. Bobenko, R. Seiler (eds), Discrete Integrable Geometry and Physics. Oxford UP (1999) 113–138.

[10] A.I. Bobenko, W.K. Schief. *Exp. Math.* ***8*** (1999) 261–280.

Спектральная задача для (dTz)

Теорема 1. (dTz) служит условием совместности для уравнений Гаусса, определяющих следующую деформацию дискретных аффинных сфер:

$$\begin{aligned}
\psi_{11} - \mu\psi_1 &= \frac{h_1 - c}{h_1(h-c)}(\psi_1 - \mu\psi) + \frac{c-\mu}{h-c}(\psi_{12} - \nu\psi_1),\\
\psi_{12} + \psi &= h(\psi_1 + \psi_2),\\
\psi_{22} - \nu\psi_2 &= \frac{h_2 - c}{h_2(h-c)}(\psi_2 - \nu\psi) + \frac{c-\nu}{h-c}(\psi_{12} - \mu\psi_2)
\end{aligned}$$

где $\quad \mu = c - (c+1)\lambda, \quad \nu = c - (c-1)\lambda^{-1}$.

Свойство **2)** сохраняется, **1)** выполняется после преобразования

$$\widetilde{\psi}(n_1, n_2) = \mu^{-n_1}\nu^{-n_2}\psi(n_1, n_2).$$

В терминах $\widetilde{\psi}$, наоборот, портится свойство 2).

τ-функция

Непрерывный случай. Подстановка $h = -2(\log \tau)_{xy}$ переводит (Tz)

$$hh_{xy} - h_x h_y = h^3 - 1$$

в трилинейное уравнение

$$4 \det \begin{pmatrix} \tau_{yy} & \tau_{xyy} & \tau_{xxyy} \\ \tau_y & \tau_{xy} & \tau_{xxy} \\ \tau & \tau_x & \tau_{xx} \end{pmatrix} = \tau^3. \tag{2}$$

Имеется пара более простых билинейных уравнений, совместных с (2):

$$\begin{aligned} 3(\tau_{xy}\tau_{xx} - \tau_x \tau_{xxy}) &= \tau_y \tau_{xxx} - \tau \tau_{xxxy}, \\ 3(\tau_{xy}\tau_{yy} - \tau_y \tau_{xyy}) &= \tau_x \tau_{yyy} - \tau \tau_{xyyy}. \end{aligned} \tag{3}$$

Они возникают из законов сохранения

$$\left(\frac{h_{xx}}{h}\right)_y = 3D_x(h), \quad \left(\frac{h_{yy}}{h}\right)_x = 3D_y(h).$$

После подстановки можно один раз проинтегрировать:

$$\frac{h_{xx}}{h} = -6(\log\tau)_{xx} + a(x), \quad \frac{h_{yy}}{h} = -6(\log\tau)_{yy} + b(y).$$

Можно положить $a = b = 0$, так как в (2) τ-функция определена с точностью до умножения на $A(x)$ и $B(y)$. Заменив h через τ получаем (3).

Дискретизация (BS). Подстановка

$$h = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau\tau_{12}}, \quad A = a\frac{\tau_1^2}{\tau\tau_{11}}, \quad B = b\frac{\tau_2^2}{\tau\tau_{22}}$$

даёт трилинейное уравнение

$$\det\begin{pmatrix} \tau_{22} & \tau_{122} & \tau_{1122} \\ \tau_2 & \tau_{12} & \tau_{112} \\ \tau & \tau_1 & \tau_{11} \end{pmatrix} = ab\tau_{12}^3.$$

Билинейные уравнения неизвестны.

Дискретизация (dTz). Подстановка $h = \dfrac{\tau_1\tau_2}{\tau\tau_{12}}$ даёт

$$c^{-1}\tau_{22}\tau_{12}\tau_{11} + \tau\tau_{122}\tau_{112} + \tau_1\tau_2\tau_{1122} = \tau_{11}\tau_2\tau_{122} + \tau_1\tau_{22}\tau_{112} + c\tau\tau_{12}\tau_{1122}$$

или

$$\det\begin{pmatrix}\tau_{22} & \tau_{122} & \tau_{1122}\\ \tau_2 & c^{-1}\tau_{12} & \tau_{112}\\ \tau & \tau_1 & \tau_{11}\end{pmatrix} = (c-c^{-1})\tau\tau_{12}\tau_{1122}.$$

Обе версии в непрерывном пределе переходят в (2).

Дополнительные билинейные уравнения:

$$\tau_{11}\tau_{12} - c\tau_1\tau_{112} = c\tau\tau_{1112} - \tau_{111}\tau_2,$$
$$\tau_{12}\tau_{22} - c\tau_2\tau_{122} = c\tau\tau_{1222} - \tau_{222}\tau_1$$

выводятся из законов сохранения

$$\frac{u_2}{u} = \frac{h}{h_{11}},\quad u := \frac{h_{11}(c-h_1)}{h_{11}h_1h-c}\,;\qquad \frac{v_1}{v} = \frac{h}{h_{22}},\quad v := \frac{h_{22}(c-h_2)}{h_{22}h_2h-c}\,.$$

После подстановки можно один раз проинтегрировать:

$$u = a(n_1)\frac{\tau\tau_{111}}{\tau_{11}\tau_1}, \quad v = b(n_2)\frac{\tau\tau_{222}}{\tau_{22}\tau_2},$$

Опять, можно положить $a = b = 0$, так как τ-функция определена с точностью до умножения на $A(n_1)$ и $B(n_2)$. Заменяя h через τ получаем билинейные уравнения.

3-солитонное решение:

$$\tau = q^{-n_1 n_2}(1+e_1+e_2+e_2+A_{12}e_1e_2+A_{13}e_1e_3+A_{23}e_2e_3+A_{12}A_{13}A_{23}e_1e_2e_3)$$

где

$e_i = \alpha_i^{n_1}\beta_i^{n_2}\gamma_i$	аналог $\exp(\alpha x + \beta y + \gamma)$
$\frac{q^2}{c} - \frac{c}{q^2} = 2\Big(q - \frac{1}{q}\Big)$	асимптотика $h(n_1, n_2) \to q$
$c(1 + \alpha_i\beta_i) = q^3(\alpha_i + \beta_i)$	закон дисперсии
$A_{ij} = A(\alpha_i, \alpha_j; c, q) = \ldots$	фазовый сдвиг

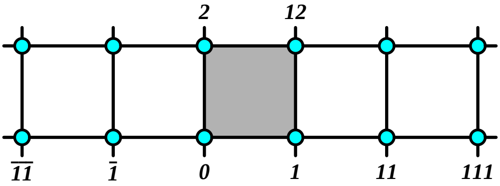
Непрерывная высшая симметрия

Теорема 2. Уравнение (dTz) $Q=0$ совместно с цепочкой (вдоль одного из направлений решётки)

$$h_t = \frac{h(c-h)}{h_1 h h_{\bar 1} - c}\left(\frac{h(c-h_1)(c-h_{\bar 1})(h_{11}h_1 - h_{\bar 1}h_{\overline{11}})}{(h_{11}h_1 h - c)(h h_{\bar 1} h_{\overline{11}} - c)} - h_1 + h_{\bar 1}\right), \quad (4)$$

то есть $D_t(Q)|_{Q=0} = 0$.

Проверка этого тождества использует 5 плакетов:



Разностный аналог уравнения Савады–Котеры

Исключение ψ_2 и ψ_{12} приводит к разностной спектральной задаче 3-го порядка

$$u\psi_{111} + \psi_{11} = \lambda(\psi_1 + u\psi), \quad u := \frac{h_{11}(c - h_1)}{h_{11}h_1h - c}.$$

Естественно, аналогичное уравнение выполняется по второму направлению. Но с этого момента мы о нём забудем, и **сменим обозначения:**

$$u\psi_3 + \psi_2 = \lambda(\psi_1 + u\psi). \tag{5}$$

Замена $h \mapsto u$ является преобразованием типа Миуры: $h = \phi/\phi_1$, где $\psi = \phi$ частное решение при $\lambda = 1/c$.

Так как цепочка (4) выдерживает замену $h \to h^{-1}$, $c \to c^{-1}$, то есть два преобразования

$$M^- : \quad u = \frac{h_2(c - h_1)}{h_2h_1h - c}, \qquad M^+ : \quad \hat{u} = \frac{(c - h_1)h}{h_2h_1h - c}.$$

Уравнение (5) — немного необычная спектральная задача с оператором L в виде отношения двух разностных операторов:

$$L\psi = \lambda\psi, \quad L = (T+u)^{-1}(uT+1)T^2,$$

где T оператор сдвига по решётке

$$T^k: \ \psi(n) \mapsto \psi(n+k) = \psi_k.$$

Изоспектральная деформация ищется как обычно: $\psi_t = A\psi$.

Теорема 3. Преобразования $M^\pm$ переводят цепочку (4) в цепочку

$$u_t = u^2(u_2u_1 - u_{-1}u_{-2}) - u(u_1 - u_{-1}), \tag{dSK}$$

обладающую представлением Лакса $L_t = [A, L]$ с оператором

$$A = (u_{-1}T + 1 - u_{-1}u_{-2} + u_{-2}T^{-1})(T - T^{-1}).$$

Напомним, что по отдельности оба потока

$$u_{t'} = u(u_1 - u_{-1}) \qquad \text{и} \qquad u_{t''} = u^2(u_2 u_1 - u_{-1} u_{-2})$$

очень хорошо известны: первый это цепочка Вольтерра [11, 12], второй это модифицированная цепочка Богоявленского [13, 14, 15]. Непрерывный предел в обоих случаях уравнение КдФ $U_t = U_{xxx} + 6UU_x$.

Но эти потоки принадлежат разным иерархиям, то есть $\partial_{t'}$ и $\partial_{t''}$ не коммутируют. Поэтому нет оснований ожидать, что линейная комбинация (dSK) интегрируема. И всё же это так!

[11] В.Е. Захаров, С.Л. Мушер, А.М. Рубенчик. *Письма в ЖЭТФ* ***19:5*** (1974) 249–253.

[12] С.В. Манаков. *Письма в ЖЭТФ* ***67:2*** (1974) 543–555.

[13] K. Narita. *J. Phys. Soc. Jpn* ***51:5*** (1982) 1682–1685.

[14] Y. Itoh. *Prog. Theor. Phys.* ***78*** (1987) 507–510.

[15] О.И. Богоявленский. *Усп. Мат. Наук* ***46:3*** (1991) 3–48.

Коммутирующие высшие потоки имеют вид ($t = t_1$)

$$L_{t_s} = [\pi_+(L^s), L],$$

где проекция π_+ отвечает разложению $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ алгебры Ли на подалгебры Ли:

$$\mathfrak{g} = \Big\{ \sum_{j<\infty} g^{(j)} T^j \Big\}$$

$$\mathfrak{g}_+ = \big\{ F(T - T^{-1}) |\ F = F^\dagger \big\}, \qquad \mathfrak{g}_- = \Big\{ \sum_{j \le 0} h^{(j)} T^j \Big\}.$$

Сохраняющиеся величины: $\sum_n H_n^{(k)}$,

$$H^{(0)} = \log u, \quad H^{(1)} = u - u_{-1} u u_1, \quad \ldots \quad H^{(s)} = \mathrm{coef}_0(L^s).$$

Однако, гамильтонова структура пока не найдена.

Заключение: некоторые обобщения

- Другие дискретизации (SK) связаны со спектральными задачами

$$u\psi_{m+l} + \psi_l = \lambda(\psi_m + u\psi),$$

где $m, l > 0$ положительные и взаимно простые. Например, при $l = 1$ возникают цепочки

$$u_t = u^2(u_m \cdots u_1 - u_{-1} \cdots u_{-m}) - u(u_{m-1} \cdots u_1 - u_{-1} \cdots u_{1-m}).$$

- Интересный пример связан с задачей

$$u_{-3}\psi_{-3} + \psi_{-1} = \lambda(\psi_1 + u\psi_3).$$

Ей отвечает цепочка

$$u_t = u(w_3 - w_2 + w_1 - w_{-1} + w_{-2} - w_{-3} - u_2 + u_{-2}), \quad w := u_1 u u_{-1}$$

аппроксимирующая уравнение Каупа

$$U_\tau = U_{xxxxx} + 5UU_{xxx} + \frac{25}{2}U_x U_{xx} + 5U^2 U_x.$$